CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1975

●

OPTION SCIENCES

MATHEMATIQUES (Epreuve B) (4 h)

Les deux problèmes sont entièrement indépendants ; sur 20 points le premier sera coté sur 8, le second sur 12.

Premier problème

Une matrice carrée étant notée M, sa transposée sera notée ${}^tM$ et la matrice inverse, si elle existe, sera notée M^{-1} L'ensemble des entiers relatifs sera noté $\mathbb{Z}$, le déterminant de M sera noté dét. M.

1° Montrer que M étant une matrice carrée à éléments dans $\mathbb{Z}$, la condition dét. $M = \pm 1$ implique que M^{-1} existe et a ses éléments dans $\mathbb{Z}$

2° On désigne par $\varphi(x, y, z)$ la forme quadratique à trois variables

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

Montrer que, si on envisage la matrice uniligne, unicolonne dont l'élément unique est $\varphi(x, y, z)$, cette matrice peut se mettre sous la forme

$$^tXPX$$

où X est la matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et P une matrice que l'on déterminera.

3° Montrer qu'il existe des matrices carrées M à éléments dans $\mathbb{Z}$ telles que, si l'on désigne par $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ la matrice produit à gauche de X par M (c'est-à-dire telle que $X' = MX$) on ait, *quelle que soit* X, $\varphi(x'\ y'\ z') = \varphi(x, y, z)$.

Ecrire la relation matricielle reliant M à P et en déduire dét.M.

4° Montrer que, si on désigne par E l'ensemble des matrices M définies dans 3°, la multiplication munit l'ensemble E d'une structure de groupe.

5° Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ appartient à E

6° Des résultats précédents déduire une infinité de solutions $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ à partir de la solution (3; 4; 5). Obtient-on ainsi toutes les solutions dans $\mathbb{Z}^3$?

Deuxième problème

On considère la courbe plane (C) dont l'équation polaire (pôle O, axe polaire Ox) est $r = a\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)$ θ angle polaire, r rayon vecteur.

1° a) Asymptote à cette courbe; position de la courbe par rapport à l'asymptote.

b) (C) possède un point double; déterminer un système de coordonnées polaires de ce point; tangentes.

c) Tangente à (C) en O.

d) Points de (C) où la tangente est parallèle à Ox.

e) Tangentes aux points d'intersection avec Ox et avec la perpendiculaire en O à Ox.

f) Tracé de la courbe (C). On prendra pour a un centimètre.

2° On envisage, dans le même plan, le cercle (γ) d'équation polaire

$$r = 2a \cos\theta$$

M étant un point de (C), la droite OM rencontre (γ) en un point P autre que O. Soit M_1 le point de la droite OM défini par

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PM_1}} + \frac{\overline{OM}}{\overline{OM_1}} = 0$$

a) Trouver un système de coordonnées polaires de M_1 (on pourra exprimer son rayon vecteur en fonction de $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$).

b) Lorsque M décrit (C), M_1 décrit une courbe (C_1). Quelle relation existe-t-il entre (C) et (C_1).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail